ＥＡ　解析学・位相序説　　講義報告[5]

２００８年3月２３日（日）　１４：３０－１７：３０

前回に引き続き、*Banach* 空間上の無限和の理論について扱った。*Banach* 空間 E 上の無限族 $\{v_i\}_{i\in I}$ の添字集合 I の有限個または無限個の分割 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が与えられているとき、無限族 $\{v_i\}_{i\in I}$ が総和可能ならば、各分割 I_α における無限和も総和可能で、無限族 $\{v_i\}_{i\in I}$ が総和は、各分割 I_α における無限和の無限和になることを示した。

練習問題 4.5. $\{v_i\}_{i\in I}\subset E$ を *Banach* 空間 E の無限族とするとき、

1. $\{v_i\}_{i\in I}$ が総和可能なとき、$J\subset I$ なる J に対して、$\{v_i\}_{i\in J}$ は総和可能であることを示せ。
2. $\{v_i\}_{i\in I}$ が総和可能で、$\sum_{i\in I} v_i = c$ とするとき、
$$\forall\varepsilon>0, \exists K\in\mathfrak{F}(I)\quad \textit{such that}\quad \left\|\sum_{i\in J} v_i - c\right\| < \varepsilon\quad \textit{for}\ \forall J(K\subset J)$$
が成立することを示せ。（J は有限でなくてもいいことに、注意する。）
3. $\{v_i\}_{i\in I}$ が総和可能なとき、
$$\forall\varepsilon>0, \exists K\in\mathfrak{F}(I)\quad \textit{such that}\quad \left\|\sum_{i\in J} v_i\right\| < \varepsilon\quad \textit{for}\ \forall J(K\cap J=\emptyset)$$
が成立することを示せ。（J は有限でなくてもいいことに、注意する。）

練習問題 4.6. $I=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n$（互いに素）で、$\sum_{i\in I} v_i$ が総和可能なとき、各 $\nu(\nu=1,2,\cdots,n)$ に対して、$\sum_{i\in I_\nu} v_i$ は総和可能で、
$$\sum_{i\in I} v_i = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i\in I_\nu} v_i$$
が成立することを示せ。

練習問題 4.7. $(a_i)_{i\in I}\subset\mathbb{R}_+$ で、$\sum_{i\in I} a_i$ が総和可能ならば、
$$\exists M>0\quad \textit{such that}\quad \sum_{i\in J} a_i \le M\quad \textit{for}\quad \forall J\in\mathfrak{F}(I)$$
が成立することを示せ。また、このとき、
$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} a_i \mid J\in\mathfrak{F}(I)\right\}$$
が成立することを示せ。

[5]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

練習問題 4.8. $(u_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ とするとき、

$$\sum_{i\in I} u_i : \text{総和可能} \Leftrightarrow \sum_{i\in I} |u_i| : \text{総和可能}$$

練習問題 4.9. I の分割 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が与えられているとき、$\sum_{i\in I} v_i$ が総和可能ならば、任意の $\alpha \in \Lambda$ に対して、$\sum_{i\in I_\alpha} v_i$ は総和可能で、

$$\sum_{i\in I} v_i = \sum_{\alpha\in\Lambda} \sum_{i\in I_\alpha} v_i$$

が成立することを示せ。

記録　J.S